

一、选择题: 1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的. 请将答案写在答题纸指定位置上.

1. 曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x-1} \right)$ 的斜渐近线为

A. $y = x + e$

B. $y = x + \frac{1}{e}$

C. $y = x$

D. $y = x - \frac{1}{e}$

2. 若微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 则

A. $a < 0, b > 0$

B. $a > 0, b > 0$

C. $a = 0, b > 0$

D. $a = 0, b < 0$

3. 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t = |t| \\ y = |t| \sin t \end{cases}$ 确定, 则

A. $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 不存在.

B. $f'(0)$ 存在, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

C. $f'(x)$ 连续, $f''(0)$ 不存在.

D. $f''(0)$ 存在, $f''(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

4. 已知 $a_b < b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛是 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛的

A. 充要条件

B. 充分不必要

C. 必要不充分

D. 既不必要也不充分

5. 已知 n 阶矩阵, A, B, C 满足 $ABC = O$, E 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵

$\begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3 则

A. $r_1 \leq r_2 \leq r_3$

B. $r_1 \leq r_3 \leq r_2$

C. $r_3 \leq r_1 \leq r_2$

D. $r_2 \leq r_1 \leq r_3$

6. 下列矩阵不能相似于对角矩阵的是

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. 已知向量 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 若 γ 既可由 a_1, a_2 线性表示, 也可由 β_1, β_2 线性表示, 则 $\gamma =$

A. $k = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in R.$

B. $k = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in R.$

C. $k = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in R.$

D. $k = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in R.$

8. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $E(|X - EX|) =$

A. $\frac{1}{e}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{e}$

D. 1

9. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 来自总体 $N(\mu, 2\sigma^2)$ 的简单随机样本, 其两样本之间相互独立, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i, S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2, \text{ 则}$$

A. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$

B. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$

C. $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$

D. $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$

10. 设 X_1, X_2 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 $\sigma (\sigma > 0)$ 是未知参数, 记

$$\hat{\sigma} = a|X_1 - X_2|, \text{ 若 } E(\hat{\sigma}) = \sigma, \text{ 则 } a =$$

A. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

C. $\sqrt{\pi}$

D. $\sqrt{2\pi}$

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$ 与 $g(x) = e^{x^2} - \cos x$ 是等价无穷小, 则 $ab =$ _____

12. 曲面 $z = x + 2y + \ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的切平面方程为 _____

13. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = 1-x, x \in [0,1]$, 若 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} =$ _____

14. 设连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2) = f(x) = x, \int_0^2 f(x) dx = 0$, 则 $\int_1^2 f(x) dx =$ _____

15. 已知向量 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3$. 若

$\gamma^T a_i = \beta^T a_i (i=1,2,3)$, 则 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 =$ _____

16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B\left(1, \frac{1}{3}\right), Y \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 则 $P\{X=Y\} =$ _____

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分) 设曲线 $y = y(x) (x > 0)$ 经过点 $(1,2)$, 该曲线上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 求函数 $f(x) = \int_1^x y(t) dt$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值.

(18) (本题满分 12 分) 求函数 $f(x,y) = (y-x^2)(y-x^3)$ 的极值.

(19) (本题满分 12 分) 设空间有界区域 Ω 有柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = 0$ 和 $x + z = 1$ 围成. Σ 为 Ω 的边界曲面的外侧. 计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} 2xz dy dz + xz \cos y dz dx + 3yz \sin x dx dy$.

(20) (本题满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上具有 2 阶连续导数. 证明:

(1) 若 $f(0)=0$ ，则存在 $\xi \in (-a, a)$ ，使得 $f''(\xi) = \frac{1}{a^2} [f(a) + f(-a)]$ ；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内取得极值，则存在 $\eta \in (-a, a)$ ，使得 $|f''(\eta)| \leq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|$ 。

(21) (本题满分 12 分) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3;$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3.$$

(22) (本题满分 12 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求：

(1) 求 X 与 Y 的协方差；

(2) 求 X 与 Y 是否相互独立；

(3) 求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度。