

一、选择题

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 是非零无穷小量, 给出以下四个命题

① 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$

② 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

③ 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(a(x))$

④ 若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(a(x))$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

其中所有的序号是

A. ①②

B. ①④

C. ①③④

D. ②③④

2. $\int_0^2 dy \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx =$

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有 2 阶导数, 则

(A) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时, $f'(x_0) > 0$

(B) 当 $f'(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加

(C) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时, $f''(x_0) > 0$

(D) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数

4. 设函数 $f(t)$ 连续, 令 $F(x, y) = \int_0^{x-y} (x-y-t)f(t)dt$, 则

A. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$

B. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$

C. $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$

D. $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$

5. 设 p 为常数, 若反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}} dx$ 收敛, 则 p 的取值范围是

A. $(-1, 1)$

B. $(-1, 2)$

C. $(-\infty, 1)$

D. $(-\infty, 2)$

6. 已知数列 $\{x_n\}$, 其中 x_n , 满足 $-\frac{\pi}{2} \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, 则

A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

B. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在

D. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在

7. 已知 $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)} dx, I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} dx, I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x} dx$, 则

A. $I_1 < I_2 < I_3$

B. $I_2 < I_1 < I_3$

C. $I_1 < I_3 < I_2$

D. $I_3 < I_2 < I_1$

8. 设 A 为 3 阶矩阵, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 的特征值为 1, -1, 0 的充分必要条件是

A.存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $A = P \wedge Q$

B.存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P \wedge P^{-1}$

C.存在正交矩阵 Q , 使得 $A = Q \wedge Q^{-1}$

D.存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P \wedge P^T$

9. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 解的情况为

A.无解

B.有解

C.有无穷多解或无解

D.有唯一解或无解

10. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价, 则 λ 的

取值范围是

A. $\{0, 1\}$

B. $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -2\}$

C. $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$

D. $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1\}$

二、填空题

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\cot x} = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 + xy + y^3 = 3$ 确定, 则 $y''(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

13. $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 微分方程 $y''' - 2y'' + 5y' = 0$ 的通解 $y(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

15. 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r = \sin 3\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right)$ 则 L 围成有界区域的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$

16. 设 A 为 3 阶矩阵, 交换 A 的第 2 行和第 3 行, 再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列, 得到矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{则 } A^{-1} \text{ 的边 } tr(A^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin^2 x)}{x^2} = 2$, 求 $f'(1)$.

18. 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $2xy' - 4y = 2\ln x - 1$ 满足条件 $y(1) = \frac{1}{4}$ 的解, 求曲线

$y = y(x) (1 \leq x \leq e)$ 的弧长.

19. 已知平面区域 $D = \{(x, y) | y - 2x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$, 计算 $I = \iint_D \frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} dx dy$.

20. 已知可微函数 $f(u, v)$ 满足 $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = 2(u - vb)e^{-(u+v)}$, 且 $f(u, 0) = u^2 e^{-u}$,

(1) $g(x, y) = f(x, y - x)$, 求 $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$;

(2) 求 $f(u, v)$ 的表达式和极值.

21. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶连续导数, 证明: $f''(x) \geq 0$ 的充分必要条件是: 对

不同的实数 a, b , 有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

22. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$,

(1) 求正交变 $X = QY$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准型;

(2) 证明: $\min_{x \neq 0} \frac{f(x)}{x^T x} = 2$.

