

一、 选择题

1. 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$, 则

A. $f(1) = 0$

B. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

C. $f'(1) = 1$

D. $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$

2. 设函数 $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 $f(u)$ 可导, 若 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = y^2(\ln y - \ln x)$, 则

A. $f(1) = \frac{1}{2}, f'(1) = 0$

B. $f(1) = 0, f'(1) = \frac{1}{2}$

C. $f(1) = \frac{1}{2}, f'(1) = 1$

D. $f(1) = 0, f'(1) = 1$

3. 已知数列 $\{x_n\}$, 其中 $-\frac{\pi}{2} \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, 则

A. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

B. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

C. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在

D. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在

4. 已知 $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)} dx, I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} dx, I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x} dx$, 则

A. $I_1 < I_2 < I_3$

B. $I_2 < I_1 < I_3$

C. $I_1 < I_3 < I_2$

D. $I_3 < I_2 < I_1$

5. 下列四个条件中, 3 阶矩阵 A 可对角化的一个充分但不必要条件是(

- A. A 有 3 个互不相等的特征值
 B. A 有 3 个线性无关的特征向量
 C. A 有 3 个两两线性无关的特征向量
 D. A 的属于不同特征值的特征向量正交

6. 设 A, B 为 n 阶矩阵, E 为单位矩阵, 若方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则

- A. 方程组 $\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} y = 0$ 只有零解
 B. 方程组 $\begin{pmatrix} E & A \\ O & AB \end{pmatrix} y = 0$ 只有零解
 C. 方程组 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$ 与 $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$ 同解
 D. 方程组 $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$ 与 $\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$ 同解

7. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价, 则 λ 的

取值范围是

- A. $\{0, 1\}$
 B. $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -2\}$
 C. $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$
 D. $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1\}$

8. 设随机变量 $X \sim U(0, 3)$, 随机变量 Y 服从参数为 2 的泊松分布, 且 X 与 Y 的方差为 -1,

则 $D(2X - Y + 1) =$

- A. 1
 B. 5
 C. 9
 D. 12

9. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 且 X_1 的 4 阶矩存在, 记 $\mu_k = E(X_1^k) (k = 1, 2, 3, 4)$,

则由切比雪夫不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有 $P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_2\right| \geq \varepsilon\right\} \leq$

A. $\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2}$

B. $\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\sqrt{n\varepsilon^2}}$

C. $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{n\varepsilon^2}$

D. $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\sqrt{n\varepsilon^2}}$

10. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 在 $X = x$ 条件下, 随机变量 $X \sim N(X,1)$, 则 X 与 Y 的相关系数为

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

11. 函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ 在点 $(0,1)$ 处的最大方向导数是_____

12. $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx =$ _____

13. 当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x^2 + y^2 \leq ke^{x+y}$ 恒成立, 则 k 的取值范围是_____

14. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^{-nx}$ 的收敛域为 $(a, +\infty)$, 则 $a =$ _____

15. 已知矩阵 A 和 $E - A$ 可逆, 其中 E 为单位矩阵, 若矩阵 B 满足 $[E - (E - A)^{-1}]B = A$, 则 $A =$ _____

16. 设 A, B, C 为随机事件, 且 A 与 B 互不相容, A 与 C 互不相容, B 与 C 相互独立,

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(B \cup C | A \cup B \cup C) =$ _____

17. 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$ 满足条件 $y(1) = 3$ 的解, 求曲线 $y = y(x)$ 的渐近线.

18. 已知平面区域 $D = \{(x, y) | y - 2 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$, 计算 $I = \iint_D \frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} dx dy$ 。

19. 已知 Σ 为曲面 $4x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ 的上侧, Γ 是 Σ 的边界曲线, 其正向与 Σ 的正法向量满足右手法则, 计算曲线积分

$$I = \int_{\Gamma} (yz^2 - \cos z) dx + 2xz^2 dy + (2xyz + x \sin z) dz$$

20. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶连续导数, 证明: $f''(x) \geq 0$ 的充要条件是: 对不同的

实数 a, b , $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 。

21. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_i x_j$ 。

(1) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵;

(2) 求正交变换 $x = Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准型;

(3) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。

22. 设 $X_1, X_2, \dots, X_N$ 是来自均值为 θ 的指数分布总体的简单随机样本, $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$ 是来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本, 且两样本相互独立, 其中 $\theta (\theta > 0)$ 是未知参数,

利用样本 $X_1, X_2, \dots, X_N, Y_1, Y_2, \dots, Y_M$, 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$, 并求 $D(\hat{\theta})$ 。

