

一、选择题: 1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有 1 项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt$ 是 x^7 的

- A. 低阶无穷小
- B. 等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 同阶但非等价无穷小

2、函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处

- A. 连续且取得极大值
- B. 连续且取得极小值
- C. 可导且导数等于零
- D. 可导且导数不为零

3、有一圆柱底面半径与高随时间变化的速率分别为 2cm/s , -3cm/s , 当底面半径为 10cm , 高为 5cm 时, 圆柱的体积与表面积随时间变化的速率分别为

- A. $125\pi\text{cm}^3/\text{s}$, $40\pi\text{cm}^2/\text{s}$
- B. $125\pi\text{cm}^3/\text{s}$, $-40\pi\text{cm}^2/\text{s}$
- C. $-100\pi\text{cm}^3/\text{s}$, $40\pi\text{cm}^2/\text{s}$
- D. $-100\pi\text{cm}^3/\text{s}$, $-40\pi\text{cm}^2/\text{s}$

4、设函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有 2 个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是

- A. $(e, +\infty)$
- B. $(0, e)$
- C. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$
- D. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

5、设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x = 0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1 + ax + bx^2$, 则

- A. $a = 1, b = -\frac{1}{2}$

B. $a=1, b=\frac{1}{2}$

C. $a=0, b=-\frac{1}{2}$

D. $a=0, b=\frac{1}{2}$

6、设函数 $f(x, y)$ 可微，且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$ ，则 $df(1, 1) =$

A. $dx + dy$

B. $dx - dy$

C. dy

D. $-dy$

7、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x) dx =$

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$

8、二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

A. 2, 0

B. 1, 1

C. 2, 1

D. 1, 2

9、设 3 阶矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 若向量组 a_1, a_2, a_3 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出，则

A. $Ax = 0$ 的解均为 $Bx = 0$ 的解

B. $A^T x = 0$ 的解均为 $B^T x = 0$ 的解

C. $Bx = 0$ 的解均为 $Ax = 0$ 的解

D. $B^T x = 0$ 的解均为 $A^T x = 0$ 的解.

10、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, 若存在下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使 PAQ

为对角矩阵, 则 P, Q 可以分别取

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

11、 $\int_{-\infty}^{+\infty} x |3^{-x^2}| dx = \underline{\hspace{2cm}}$

12、设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1, \\ y = 4(t-1)e^t + t^2, \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$

13、设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z + y \ln z + \arctan(2xy) = 1$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$

14、已知函数 $f(t) = \int_1^{t^2} dx \int_{\sqrt{x}}^t \sin \frac{x}{y} dy$, 则 $f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

15、微分方程 $y''' - y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

16、多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17、(本题满分 10 分)求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

18、(本题满分 12 分)已知函数 $f(x) = \frac{x|x|}{1+x}$, 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

19、(本题 满 分 12 分) 设 函 数 $f(x)$ 满 足 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6}x^2 - x + C$, L 为 曲 线

$y = f(x) (4 \leq x \leq 9)$, 记 L 的弧长为 S , L 绕 x 轴旋转一周所成旋转曲面面积为 A , 求 A 和 A 。

20、(本题满分 12 分)设 $y = y(x) (x > 0)$ 是微分方程 $xy' - 6y = -6$ 满足条件 $y(\sqrt{3}) = 10$ 的解:

(1)求 $y(x)$;

(2)设 P 为曲线 $y = y(x)$ 上一点, 记曲线 $y = y(x)$ 在点 P 的法线在 y 轴上的截距为 I_p , 当 I_p 最小时, 求点 P 的坐标.

21.(本题满分 12 分)设平面区域 D 由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 (x \geq 0, y \geq 0)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D xy dx dy$ 。

22、(本题满分 12 分)矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 又有两个不同的特征值, 若 A 相似于对角矩阵,

求 a, b 的值, 并求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

,

