2021年全国研究生入学统一考试

数学（一）

一、选择题(本题共10小题，每小题5分，共50分.每小题给出的四个选项中，只.有一个选项是符合题目要求，把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.)

1.函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处（　　）

A.连续且取极大值.
B.连续且取极小值.
C.可导且导数为0.
D.可导且导数不为0.

2.设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f\left(x+1,e^x\right)=x(x+1)^2, f(x,y)^2\ln x,$ 则$df(1,1)=$（　　）

A. $dx+dy$

B. $dx-dy$

C. dy

D. $-dy$

(3)设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$，在 $x=0$ 处的3次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$,则

A. $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$

B. $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

C. $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$

D. $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

(4) 设函数 $f(x)$)在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$

B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{2}{n}$

(5)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（　　）

A.2,0.

B.1,1.

C.2,1.

D.1,2.

6. 已知 $a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，记 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-k\beta_1$， $\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_2$，若 β_1，β_2，β_3 两两正交，则 l_1,l_2 依次为（　　）

A. $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$

B. $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$

D. $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$

(7)设 A, B 为阶实矩阵，下列不成立的是(　　)

A. $r\begin{pmatrix}A & O\\ O & A^TA\end{pmatrix}=2r(A)$

B. $r\begin{pmatrix}A & BA\\ O & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$

C. $r\begin{pmatrix}A & BA\\ O & AA^T\end{pmatrix}=2r(A)$

D. $r\begin{pmatrix}A & O\\ BA & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$

(8)设 A，B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列命题中不成立的是(　　)

A.若 $P(A|B)=P(A)$,则 $P(A|\bar{B})=P(A)$.

B.若 $P(A|B)>P(A)$,则 $P(\bar{A}|\bar{B})=P(\bar{A})$

C.若 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$.

D.若 $P(A|A\cup B)>P(\bar{A}|A\cup B)$,则 $P(A)>P(B)$.

9.设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\bar{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}$,则（　　）

A.$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

B.$\hat{\theta}$不是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

C.$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

D.$\hat{\theta}$不是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

10.设 $X_1,X_2,\ldots X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本，考虑假设检验问题:

$H_0:\mu\le 10,H_1:\mu>10.\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，若该检验问题的拒绝域为 $W=\{\bar{X}>11\}$,其中 $\bar{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$，则μ=11.5时，该检验犯第二类错误的概率为（　　）

A.$1-\Phi(0.5)$

B.$1-\Phi(1)$

C.$1-\Phi(1.5)$

D.$1-\Phi(2)$

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上)

11.$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$________________

12.设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2e^t+t+1, \\ y=4(t-1)e^t+t^2 \end{cases}$ 确定，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$ =______________

13.欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1, y'(1)=2$ 得解为 $y=$____________

14.设 Σ 为空间曲线区域 $\{(x,y,z)|x^2+4y^2\le 4, 0\le z\le 2\}$ 表面的外侧，则曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$_______________

15.设 $A=(a_{ij})$ 为 3 阶矩阵，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，若 A 的每行元素之和均为 2，且

$|A|=3$,则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$____________

16.甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球,先从甲盒中任取一球,观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球.令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数______________

三、解答题(本题共 6 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$

18.(本题满分 12 分)

设 $u_n(x)=e^{-nx}=\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,\ldots)$.求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数

19.(本题满分 12 分)

已知曲线 $C:\begin{cases} x^2+2y^2-z=6, \\ 4x+2y+z=30, \end{cases}$，求 C 上的点到 xoy 坐标面距离的最大值.

20.(本题满分 12 分)

设 $D\subset R^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$ 取得最大值的积分区域记为

D_1.

(1)求 $I\left(D_1\right)$ 的值.

(2)计算 $\int\limits_{\partial D}\frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)dx+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

21.(本题满分 12 分)

已知 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

（1） 求正交矩阵 P，使 $P^T AP$ 为对角矩阵;

（2）)求正定矩阵 C ,使得 $C^2=\left(a+3\right)E-A$ =

22.(本题满分 12 分)

在区间 $\left(0,2\right)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为 X，较长的的-YI 段长度记为 Y,令 $z=\frac{Y}{X}$

(1)求 X 的概率密度;

(2)求 Z 的概率密度.

(3)求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.