

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 下列无穷小量中最高阶的是

A.  $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$

B.  $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$

C.  $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$

D.  $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

”

2. 函数  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln(1+x)}{(e^x - 1)(x-2)}$  的第二类间断点的个数为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

3.  $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx =$

A.  $\frac{\pi^2}{4}$

B.  $\frac{\pi^2}{8}$

C.  $\frac{\pi}{4}$

D.  $\frac{\pi}{8}$

4. 已知  $f(x) = x^2 \ln(1-x)$ , 当  $n \geq 3$  时,  $f^{(n)}(0) =$

A.  $-\frac{n!}{n-2}$

B.  $\frac{n!}{n-2}$

C.  $-\frac{(n-2)!}{n}$

D.  $\frac{(n-2)!}{n}$

5. 关于  $f(x, y) = \begin{cases} xy, & xy \neq 0, \\ x, & y = 0, \\ y, & x = 0, \end{cases}$  给出下列结论:

(1)  $\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} = 1$  (2)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\bigg|_{(0,0)} = 1$  (3)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$  (4)  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$

其中正确的个数为

- A. 4
- B. 3
- C. 2
- D. 1

6. 设  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上可导, 且  $f'(x) > f(x) > 0$ , 则

- A.  $\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$
- B.  $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$
- C.  $\frac{f(1)}{f(-1)} > e^2$
- D.  $\frac{f(2)}{f(-1)} > e^3$

7. 四阶矩阵  $A$  不可逆,  $A_{12} \neq 0$ ,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  为矩阵  $A$  的列向量组, 则  $A * X = 0$  的通解为

- A.  $x = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3$
- B.  $x = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_4$
- C.  $x = k_1 a_1 + k_2 a_3 + k_3 a_4$
- D.  $x = k_1 a_2 + k_2 a_3 + k_3 a_4$

8.  $A$  为 3 阶方阵,  $a_1, a_2$  为属于特征值 1 的线性无关的特征向量,  $a_3$  为  $A$  的属于 -1 的特征向

量, 满足  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$  的可逆矩阵  $P$  为

- A.  $(a_1 + a_3, a_2, -a_3)$

B.  $(a_1 + a_2, a_2, -a_3)$

C.  $(a_1 + a_3, -a_3, a_2)$

D.  $(a_1 + a_2, -a_3, a_2)$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 设  $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$ , 则  $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1} =$  \_\_\_\_\_

10. 求  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx =$  \_\_\_\_\_

11. 设  $z = \arctan[xy + \sin(x + y)]$ , 则  $dz \Big|_{(0, \pi)} =$  \_\_\_\_\_

12. 斜边长为  $2a$  的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 记重力加速度为  $g$ , 水密度为  $\rho$ , 则三角形平板的一侧收到的压力为 \_\_\_\_\_

13. 设  $y = y(x)$  满足  $y'' + 2y' + y = 0$ , 且  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ , 则  $\int_0^{+\infty} y(x) dx =$  \_\_\_\_\_

14. 求  $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$  \_\_\_\_\_

三、解答题：15~23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 请将答案写在答题纸指定位置上.

15. (本题满分 10 分) .

求曲线  $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} (x > 0)$  的斜渐近线。

16. (本题满分 10 分)

设  $f(x)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1, g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ , 求  $g'(x)$  且证明  $g'(x)$  在  $x = 0$  处连续.

17. (本题满分 10 分) .

求  $f(x) = x^3 + 8y^3 - xy$  的极值。

18. (本题满分 10 分)

设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有定义, 且满足  $2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1 + x^2}}$ ,

(1) 求  $f(x)$ ;

(2) 求曲线  $y = f(x), y = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  及  $y$  围成的图形绕  $x$  轴旋转一周的体积。

19. (本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} d\sigma$ , 其中区域 D 由  $x=1, x=2, y=x$  及  $x$  轴围成.

20. (本题满分 11 分)

已知  $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ ,

(1) 证明:  $\exists \xi \in (1, 2), sf(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}$

(2) 证明:  $\exists \eta \in (1, 2), sf(2) = \ln 2 \cdot \eta \cdot e^{\eta^2}$

21. (本题满分 11 分)

已知  $f(x)$  可导, 且  $f'(x) > 0 (x \geq 0)$ . 曲线  $y = f(x)$  过原点, 点 M 为曲线  $y = f(x)$  上任意

一点, 过点 M 的切线与  $x$  轴相交于点 T, 过点 M 做 MP 垂直于  $x$  轴于点 P, 且曲线  $y = f(x)$

与直线 MP 以及  $x$  轴所围成图形的面积与三角形 MTP 的面积比恒为 3:2, 求曲线满足的方程.

22. (本题满分 11 分)

二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3$  经可逆线性变换  $x = Py$  变换

为  $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$

(1) 求  $a$  的值;

(2) 求可逆矩阵 P.

23. (本题满分 11 分)

设 A 为 2 阶矩阵,  $P = (a, Aa)$ ,  $a$  是非零向量且不是 A 的特征向量。

(1) 证明矩阵 P 可逆;

(2) 若  $A^2a + Aa - 6a = 0$ , 求  $P^{-1}AP$  并判断 A 是否相似于对角矩阵。

