

2020 年全国研究生入学统一考试

数学(一)

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有 1 项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是 ()

A. $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$

B. $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$

D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin t^2} dt$

2、设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则 ()

A. 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

B. 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

C. 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$

D. 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$

3、设函数 $f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, $f(0, 0) = 0$, $n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) \bigg|_{(0,0)}$ 非零向量 $d \perp n$, 则 ()

A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|n(x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

B. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|n \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|d \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

D. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|d \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

4、设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, r 是实数, 则 ()

A. 当 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 发散时, $|r| \geq R$

B. 当 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 发散时, $|r| \leq R$

C. 当 $|r| \geq R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 发散

D. 当 $|r| \leq R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 发散

5、若矩阵 A 经初等列变换化成 B , 则 () .

A. 存在矩阵 P , 使得 $PA = B$

B. 存在矩阵 P , 使得 $BP = A$

C. 存在矩阵 P , 使得 $PB = A$

D. 方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

6、已知直线 $L_1: \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点,

法向量 $a_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}, i=1,2,3$, 则 ()

A. α_1 可由 α_2, α_3 线性表示

B. α_2 可由 α_1, α_3 线性表示

C. α_3 可由 α_1, α_2 线性表示

D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

7、设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$,

则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 ()

- A. $\frac{3}{4}$
 B. $\frac{2}{3}$
 C. $\frac{1}{2}$
 D. $\frac{5}{12}$

8、设 $x_1, x_2, \dots, x_{(n)}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表示

标准正态分布的分布函数，则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right)$ 的近似值为 ()

二、填空题: 9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$, 则 $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

11. 若函数 $f(x)$ 满足

$f''(x) + af'(x) = f(x) = 0 (a > 0)$, 且 $f(0) = m, f'(0) = n$, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

12、设函数 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

13、行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

14、设 x 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\text{Cov}(X, Y) = \underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题: 15~23 小题，共 94 分请将解答写在答题纸指定位置 t 上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、(本题满分 10 分)求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

16、(本题满分 10 分)计算曲线积分 $I = \int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$, 其中 $L: x^2 + y^2 = 2$,

方向为顺时针方向.

17、(本题满分 10 分)设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, (n+1)a_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)a_n$, 证明:当 $|x| < 1$ 时, 幂

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数.

18、(本题满分 10 分)设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 \leq 4)$ 的下侧, $f(x)$ 是连续函数, 计算 $I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2xy - y]dydz + [yf(xy) + 2y + x]dzdx + [zf(xy) + z]dxdy$.

19、(本题满分 10 分)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数,

$f(0) = f(2) = 0, M = \max_{x \in [0, 2]} \{f(x)\}$. 证明:

(1) 存在一点 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$;

(2) 若对任意的 $x \in (0, 2), |f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

20、(本题满分 11 分)设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为

二次型 $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$;

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求正交矩阵 Q .

21、设 A 为 2 阶矩阵, 其中 $P = (a, Aa)$, 其中 a 是非零向量不是 A 的特征向量.

(1) 证明 P 为可逆矩阵;

(2) 若 $A^2a + Aa - 6a = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

22、设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的分布律为

$$P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}, Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2.$$

(1) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数中 $\Phi(x)$ 表示;

(2) 证明: 随机变量 Y 服从标准正态分布.

23、设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为 $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s + t | T > s\}$;

(2)任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1, t_2, \dots, t_n$ ，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$ 。

成都网易有道考研