

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

(2) 设函数 $y = x \sin x + 2 \cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \right)$ 的拐点坐标为

A. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$

B. $(0, 2)$

C. $(\pi, -2)$

D. $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$

(3) 下列反常积分发散的是

A. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$

B. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

C. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

D. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

(4) 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$, 则 a, b, c 依次为

- A. 1, 0, 1 .
- B. 1, 0, 2
- C. 2, 1, 3
- D. 2, 1, 4.

(5) 已知积分区域 $D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$,

$I_2 = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $I_3 = \iint_D (1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, 试比较 I_1, I_2, I_3 的大小

A. $I_3 < I_2 < I_1$

B. $I_1 < I_2 < I_3$

C. $I_2 < I_1 < I_3$

D. $I_2 < I_3 < I_1$

(6) 已知 $f(x), g(x)$ 二阶可导且在 $x=a$ 处连续, 则 $f(x), g(x)$ 在 a 点相切且曲率相等是

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^2} = 0$ 的

A. 充分非必要条件.

B. 充分必要条件.

C. 必要非充分条件.

D. 既非充分也非必要条件.

(7) 设 A 是四阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中只有 2 个向量,

则 A^* 的秩是

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

(8) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵, 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T Ax$ 的规范形为

A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}} =$ _____

(10) 曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 在 $t = \frac{3}{2}\pi$ 对应点处切线在 y 轴上的截距 _____

(11) 设函数 $f(u)$ 可导, $z = yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$, 则 $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____

(12) 设函数, $y = \ln \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为 _____

(13) 已知函数 $f(x) = x \int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____

(14) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中 (i, j) 元的代数余子式, 则

$$A_{11} - A_{12} = \underline{\hspace{2cm}}$$

三、解答题: 15- 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

已知 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x < 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

(16) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$ 。

(17) (本题满分 10 分)

已知 $y(x)$ 满足微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$, 且有 $y(1) = \sqrt{e}$.

(1) 求 $y(x)$;

(2) $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$ 求平面区域 D 绕 x 轴旋转成的旋转体体积.

(18) (本题满分 10 分)

已知平面区域 D 满足 $|x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4$, 求 $\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ 。

(19) (本题满分 10 分)

$n \in N_+, S_n$ 是 $f(x) = e^{-x} \sin x, 0 \leq x \leq n\pi$ 的图像与 x 轴所围图形的面积, 求 S_n , 并求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

20. (本题满分 11 分)

已知函数 $u(x, y)$ 满足 $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 求 a, b 的值, 使得在变换

$u(x, y) = v(x, y) e^{ax+by}$ 下, 上述等式可化为 $v(x, y)$ 不含一阶偏导数的等式.

(21) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$;

(2) 存在 $\eta \in (0,1)$, 使得 $f''(\eta) < -2$.

(22) (本题满分 11 分) 已知向量组

$$(\text{I}) a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a^2+3 \end{bmatrix}, (\text{II}) \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a+3 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-a \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2+3 \end{bmatrix}, \text{若向}$$

量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 求 a 的取值, 并将 β_3 用 a_1, a_2, a_3 线性表示.

(23) (本题满分 11 分)

$$\text{已知矩阵 } A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ 与 } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} \text{ 相似,}$$

(1) 求 x, y ;

(2) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.