2019年全国研究生入学统一考试

数学（一）

一、选择题: 1~8 小题，每小题 4 分,共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位上.

1.当 x→0 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k= (　　)

A.1

B.2

C.3

D.4

2.设函数 $f(x)=\begin{cases} x|x|, x\le 0 \\ x\ln x, x>0 \end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

A.可导点，极值点

B.不可导的点，极值点

C.可导点，非极值点

D.不可导点，非极值点

3、设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是(

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}^2-u_n^2\right)$

4、设函数 $Q(x,y)=\frac{x}{y^2}$，如果对于上半平面 $(y>0)$ 内任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_c P(x,y)dx+Q(x,y)dx=0$，那么函数 $P(x,y)$ 可取为（　　）

A. $y-\frac{x^2}{y^3}$

B. $\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}$

C. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$

D. $x-\frac{1}{y}$

5、设 A 是三阶实对称矩阵，E 是三阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$，且 $|A|=4$，则二次型 X^TAX 的规范形是(　　)

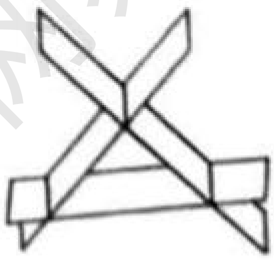
A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$

B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$

D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

6、如图所示，有三张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程 $a_{il}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i\left(i=1,2,3\right)$ 组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A,\overline{A}$，则(　　).



A. $r\left(A\right)=2,r\left(\overline{A}\right)=3$

B. $r\left(A\right)=2,r\left(\overline{A}\right)=2$

C. $r\left(A\right)=1,r\left(\overline{A}\right)=2$

D. $r\left(A\right)=1,r\left(\overline{A}\right)=1$

7、设 A, B 为随机事件，则 $P\left(A\right)=P\left(B\right)$的充分必要条件是(　　)

A. $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)$

B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$

D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

8、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.则 $P\{|X-Y|<1\}$(　　)

A.与μ无关，而与 σ^2 有关

B.与μ有关，而与 σ^2 无关

C.与μ，σ^2 都有关

D.与μ，σ^2 都无关

二、填空题: 9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位上.

9、设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$____________

10、微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解为 $y=$____________

11、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)$=____________

12、设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geq 0)$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,dxdy=$____________

13、设 $A=(a_1,a_2,a_3)$ 为三阶矩阵，若 a_1,a_2 线性无关，且 $a_3=-a_1+2a_2$，则线性方程组 $AX=0$ 的通解为____________

14、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2},0<x<2,\\ 0,\quad 其他\end{cases}$，$F(x)$)为 X 的分布函数，$E(X)$ 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>E(X)-1\}=$__________

三、解答题: 15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15、(本题满分 10 分)设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=e^{\frac{x^2}{2}}$ 2 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

（1）求 $y(x)$：

(2)求曲线 $y=y(x)$ 的凸凹区间及拐点.

16、(本题满分 10 分)设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点(3, 4)处的方向导数中,沿方向 $l=-3i-4j$ 的方向导数最大，最大值为 10.

(1) 求常数 a,b;

(2) 求曲面 $z=2+ax^2+by^2\left(z\geq 0\right)$ 的面积.

17、(本题满分 10 分)求曲线 $y=e^{-x}\sin x\left(x\geq 0\right)$ 与 x 轴之间形成图形的面积.

18、(本题满分 10 分)设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\left(n=0,1,2...\right)$

(1)证明:数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\left(n=2,3...\right)$；

(2)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

19、(本题满分 10 分)设 Ω 是由锥面 $x^2=\left(y-z\right)^2=\left(1-z\right)^2\left(0\leq z\leq 1\right)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

20、(本题满分 11 分)设向量组 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},a_2\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},a_3\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}$ 为 R^3 空间的一一个基，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 在这组基下的坐标为 $\begin{pmatrix}b\\c\\1\end{pmatrix}$.

(I) 求 a,b,c;

(2) 证明：a_2,a_3,β 也为 R^3 空间的一-个基， 并求 a_2,a_3,β 到 a_1,a_2,a_3 的过渡矩阵.

21、(本题满分 11 分)已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x,y;

(2)求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

22、(本题满分 11 分)设随机变量 X,Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为: $P\left\{Y=-1\right\}=P,\left\{Y=1\right\}=1-P,\left(0<P<1\right)$.令 $Z=XY$.

(1)求 Z 的概率密度;

(2) p 为何值时，X,Z 不相关;

(3) 此时，X,Z 是否相互独立.

23、(本题满分 11 分)设总体 X 的概率密度为 $f\left(x,\sigma^2\right)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geq\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$

其中μ是已知参数，σ 是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,\ldots.X_N$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1)求常数 A 的值;

(2)求 σ^2 的最大似然估计量.