一、选择题: 1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1.下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x)=|x|\sin|x|$

B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $f(x)=\cos|x|$

D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

(2)过点(1,0,0)与(0,1,0)，且与 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为

A. $z=0$与$x+y-z=1$

B. $z=0$与$2x+2y-z=2$

C. $y=0$与$x+y-z=1$

D. $y=0$与$2x+2y-z=2$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$

A. $\sin 1+\cos 1$

B. $2\sin 1+\cos 1$

C. $3\sin 1+\cos 1$

D. $3\sin 1+2\cos 1$

(4)设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx, N=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}dx, K=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx$,则

A.M>N>K.

B.M>K>N.

C.K>M>N.

D.K> N> M.

(5)下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(6)设 A，B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩， (X Y)表示分块矩阵，则

A. $r(A\ \mathrm{AB}) = r(A)$

B. $r(A\ \mathrm{BA}) = r(A)$

C. $r(A\ \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$

D. $r(A\ \mathrm{B}) = r(A^T\ \ B^T)$

(7)设 $f(x)$ 为某分布的概率密度函数， $f(1+x) = f(1+x), \int_0^2 f(x)dx = 0.6$ ，则 $p\{X<0\} =$

A.0.2
B.0.3
C.0.4
D.0.6

(8)给定总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma^2$ 已知，给定样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,对总体均值μ进行检验，令

$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$，则

A.若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha = 0.01$ 时也拒绝 H_0.

B.若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha = 0.01$ 时拒绝 H_0.

C.若显著性水 $\alpha = 0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha = 0.01$ 时接受 H_0.

D.若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha = 0.01$ 时也接受 H_0.

二、填空题: 9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

9.若 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}} = 3e$,则 $k =$ __________

10.设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数，若曲线 $y=f(x)$ 过点(0,0)且与曲线 $y=2^x$ 在点(1,2)处相切，则 $\int_0^1 xf''(x)dx=$__________

11.设 $F(x,y,z)=xy\vec{i}+yz\vec{j}+zx\vec{k}$，则 $rot\vec{F}(1,1,0)=$__________

(12) 曲线 L 是由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y+z=0$ 相交而成，求 $\oint xyds=$__________

(13) 二阶矩阵 A 有两个不同特征值，a_1,a_2 是 A 的线性无关的特征向量，$A^2(a_1+a_2)=(a_1+a_2)$,则 $|A|=$__________

(14) 设随机事件 A 与 B 相互独立，A 与 C 相互独立，$BC=\phi$，若 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2},P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4}$,则 $P(C)=$__________

三、解答题: 15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或写出步骤.

(15) (本题满分 10 分) 求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$。

(16) (本题满分 10 分)将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形。三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在，求出最小值.

(17) (本题满分 10 分) 曲面 $\sum$: $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$，取前侧，求 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+(y^3+2)dzdx+z^3dxdy$。

(18) (本题满分 10 分)已知微分方程 $y'+y=f(x)$,其中 $f(x)$ 的是 R 上的连续函数.

(1)若 $f(x)=x$ 时，求微分方程的通解.

(2)若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，证明:方程存在唯一的以 T 为周期的解.

(19) (本题满分 11 分)设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1>0,x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,...)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(20) (本题满分 11 分)设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中 a 是参数.

(1)求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解:

(2)求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形

(21) (本题满分 11 分)已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}。$$

(1)求 a ;

(2)求满足 AP= B 的可逆矩阵 P。

(22) (本 题 满 分 11 分) 设 随 机 变 量 X,Y 相 互 独 立 ， 且 X 的 概 率 分 布 为: $P(X=)=P(X=-1)=\frac{1}{2}.Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布，令 Z= XY.

(1)求 Cov (X,Z);

(2)求 Z 的概率分布.

(23) (本题满分 11 分)设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$,其中 $\sigma\in(0,+\infty)$为未知参数， $X_1,X_2,....X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记σ的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$;

(1)求 $\hat{\sigma}$;

(2)求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$.