

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则

A. $ab = \frac{1}{2}$

B. $ab = -\frac{1}{2}$

C. $ab = 0$

D. $ab = 2$

2、二元函数 $z = xy(3 - x - y)$ 的极值点是

A. (0,0).

B. (0,3).

C. (3,0).

D. (1,1).

3、设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x) \cdot f'(x) > 0$, 则

A. $f(1) > f(-1)$.

B. $f(1) < f(-1)$.

C. $|f(1)| > |f(-1)|$.

D. $|f(1)| < |f(-1)|$.

4、若级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\sin \frac{1}{n} - k \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]$ 收敛, 则 $k =$

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. -2.

5、设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则

A. $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆

B. $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆

C. $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

D. $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

6、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则

- A. A 与 C 相似, B 与 C 相似.
 B. A 与 C 相似, B 与 C 不相似.
 C. A 与 C 不相似, B 与 C 相似.
 D. A 与 C 不相似, B 与 C 不相似.

7、设 A, B, C 为三个随机事件, 且 A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立, 则 $A \cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是

- A. A 与 B 相互独立.
 B. A 与 B 互不相容.
 C. AB 与 C 相互独立.
 D. AB 与 C 互不相容.

8、设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 则下列结论不正确的是

- A. $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.
 B. $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.
 C. $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布.
 D. $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

9、 $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

10、差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 通解为 $y_t = \underline{\hspace{2cm}}$

11. 设生产某产品的平均成本 $\bar{C}(q) = 1 + e^{-q}$, 其中产量为 q , 则边际成本为 $\underline{\hspace{2cm}}$

12、设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy, f(0, 0) = 0$,

则 $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

13、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, a_1, a_2, a_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组

Aa_1, Aa_2, Aa_3 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$

14、设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=-2\}=\frac{1}{2}, P\{X=1\}=a, P\{X=3\}=b$, 若 $EX=0$, 则 $DX=$ _____

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、(本题满分 10 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

16、(本题满分 10 分) 计算积分 $\iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dx dy$, 其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

17、(本题满分 10 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

18、(本题满分 10 分) 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根, 确定常数 k 的取值范围.

19、(本题满分 10 分) 设 $a_0=1, a_1=0, a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1}) (n=1,2,3,\dots)$ $S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数,

(1) 证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1.

(2) 证明: $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0 (x \in (-1,1))$, 并求 $S(x)$ 表达式.

20、(本题满分 11 分) 设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$,

(1) 证明 $r(A)=2$;

(2) 若 $\beta=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

21、(本题满分 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 Q .

22、(本题满分 11 分) 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率分布为

$P\{X=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}, Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(1) 求 $P\{Y \leq E(Y)\}$;

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

23、(本题满分 11 分) 某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布

$N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$, 利用 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 估计 σ .

(1) 求 Z_1 的概率密度;

(2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(3) 求 σ 的最大似然估计量.

成都网易有道考研

