

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 若函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos \sqrt{x}, & x > 0 \\ ax & x = 0 \\ b, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则

A. $ab = \frac{1}{2}$

B. $ab = -\frac{1}{2}$

C. $ab = 0$

D. $ab = 2$

(2) 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)f'(x) > 0$, 则

A. $f(1) > f(-1)$

B. $f(1) < f(-1)$

C. $|f(1)| > |f(-1)|$

D. $|f(1)| < |f(-1)|$

(3) 函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $u = (1, 2, 2)$ 的方向导数为

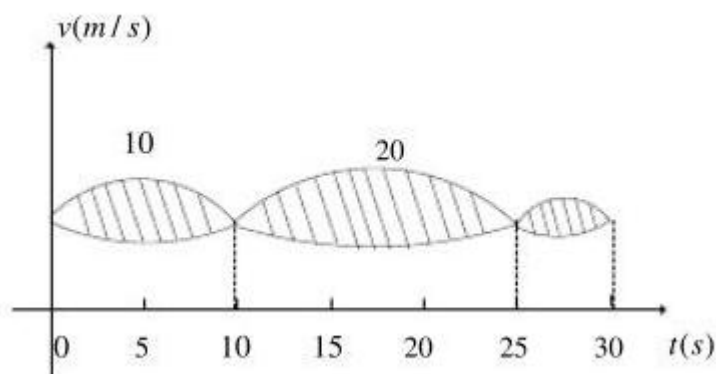
A. 12

B. 6

C. 4

D. 2

(4) 甲乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10(单位: m)处, 图中实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$ (单位: m/s), 虚线表示乙的速度曲线 $v = v_2(t)$, 三块阴影部分面积的数值依次为 10, 20, 3, 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 。(单位: s), 则



A. $t_0 = 10$

B. $15 < t_0 < 20$

C. $t_0 = 25$

D. $t_0 > 25$

(6) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则

A. A 与 C 相似, B 与 C 相似

B. A 与 C 相似, B 与 C 不相似

C. A 与 C 不相似, B 与 C 相似

D. A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

(7) 设 A, B 为随机概率, 若 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是

A. $P(B|A) > P(\bar{B}|\bar{A})$

B. $P(B|A) < P(\bar{B}|\bar{A})$

C. $P(\bar{B}|A) > P(B|\bar{A})$

D. $P(\bar{B}|A) < P(B|\bar{A})$

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则下列结论中不正确的是

A. $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

B. $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

C. $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布

D. $n(X - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

(10) 微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

(11) 若曲线积分 $\int_L \frac{x dx - a y dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关, 则 $a =$ _____

(12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x) =$ _____

(13) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, a_1, a_2, a_3 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 Aa_1, Aa_2, Aa_3 ,

的秩为 _____

(14) 设随机变量 X 的分布函数为 $F'(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分

布函数, 则 $EX =$ _____

三、解答题: 15- 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 设函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数, $y = f(e^x, \cos x)$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$,

$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0}$

(16) (本题满分 10 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

(17) (本题满分 10 分) 已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值

(18) (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(1) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 证明:

(1) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根:

(2) 方程 $f(x)f'(x) + (f'(x))^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个不同实根。

(19) (本题满分 10 分) 设薄片型物体 s 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 割下的有限部分, 其上任一点的密度为 $\mu = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。记圆锥面与柱面的交线为 C

(1) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程:

(2) 求 s 的 M 质量。

(20) (本题满分 11 分) 设 3 阶矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $a_3 = a_1 + 2a_2$ 。

(I)证明 $r(A)=2$

(II)若 $\beta = a_1 + a_2 + a_3$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解。

(21)(本题满分 11 分)设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + \alpha x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = QY$ 下的标准型 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ 经,求 α 的值及一个正交矩阵 Q

(22)(本 题 满 分 11 分) 设 随 机 变 量 X, Y 相 互 独 立 , 且 X 的 概 率 分 布 为

$$P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}, Y \text{ 的概率密度为 } f(y)=\begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1)求 $P(Y \leq EY)$

(2)求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

(23)(本题满分 11 分)某工程师为了解一台天平的精度,用该天平对一物体的质量做 n 次测量,该物体的质量 μ 是已知的,设 n 次测量结果 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布

$N(\mu, \sigma^2)$ 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i=1, 2, \dots, n)$, 利用 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 估计 σ 。

(1)求 Z_i 的概率密度:

(2)利用一阶矩求 σ 的矩估计量

