**一、选择题: 1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.**

(1)若反常积分[售._dx 收敛，则

A. $a<1$且$b>1$

B. $a.1$且$b>1$

C. $a<1$且$a+b>1$

D. $a>1$且$b>1$

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), x<1\\ \ln x, x\geq 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是

A. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1\\ x(\ln x-1), x\geq 1\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1\\ x(\ln x+1)-1, x\geq 1\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1\\ x(\ln x+1)+1, x\geq 1\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1\\ x(\ln x-1)+1, x\geq 1\end{cases}$

(3)若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}, y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$)的两个解，则 $q(x)=$

A. $3x(1+x^2)$

B. $-3x(1+x^2)$

C. $\dfrac{x}{1+x^2}$

D. $-\dfrac{x}{1+x^2}$

(4)已知函数，$f(x)=\begin{cases}x, x\leq 0\\ \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}<x\leq\dfrac{1}{n}, n=1,2,\ldots\end{cases}$，则

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导

D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(5)设 A，B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是

A. $A^T$ 与 $B^T$ 相似

B. $A^1$ 与 $B^1$ 相似

C. $A+A^T$ 与 $\overline{B}+B^T$ 相似

D. $A+A^1$ 与 $B+B-1^T$ 相似

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为

A.单叶双曲面
B.双叶双曲面
C.椭球面
D.柱面

(7)设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,记 $p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$,则

A. p 随着 μ 的增加而增加
B. p 随着 σ 的增加而增加
C. p 随着 μ 的增加而减少
D. p 随着 σ 的增加而减少

(8)随机试验 E 有三种两两不相容的结果 $A_1,A_2,A_3$，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次, X 表示 2 次试验中结果 $A_1$ 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 $A_2$ 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为

**二、填空题: 9 -14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.**

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=$ ____________

(10)向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)i+xyj+zk$ 的旋度 $rotA=$ _________

(11) 设 函 数 $f(u,v)$ 可 微 ， $z=z(x,y)$ 有 方 程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确 定 ， 则 $dz\big|_{(0,1)}=$ _________。

(12)设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f''(0)=1$，则 $a=$ __________

(13)行列式$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$__________

(14)设 $x_1, x^2, \ldots, x_n$ 为来自总体 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{x}=9.5$，参数μ的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8,则μ的置信度为 0.95 的双侧置信区间为__________。

**三、解答题: 15- -23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

(15) (本题满分 10 分)已知平面 区域 $D=\left\{(r,\theta) \middle| 2 \le r \le 2(1+\cos\theta), -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D x dx dy$。

(16) (本题满分 10 分)设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$,其中 0<k<1.

(1)证明:反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 收敛:

(2)若 $y(0)=1, y'(0)=1$,求 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 的值.

(17)(本题满分 10 分)设函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$,且 $f(0,y)=y=1, L_1$ 是从点(0,0)到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_1} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$，并求 $I(t)$ 的最小值

(18) 设有界区域 $\Omega$ 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成， $\sum$为 $\Omega$ 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+1\right) dy dz-2 y dz dx+3 z dx dy$。

(19)(本题满分 10 分)已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$,设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2\ldots)$，证明:

(I)级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$ 绝对收敛;

(II) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty} x_n<2$。

(20) (本题满分 11 分)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$ 当 a 为何值时，方程 AX =B 无解、有唯一解、有无穷多解?

(21) (本题满分 11 分)已知矩阵 $X=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{3a}{a+2}\\ 0 & \dfrac{a-4}{a-2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

(I)求 $A^{99}$

(II) 设 3 阶矩阵 $B=(a,a_2,a_3)$满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ 的线性组合。

(22)(本题满分 11 分)设二维随机变量(X,Y)在区域 $D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布，令 $\bigcup=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$

(I)写出(X,Y)的概率密度;
(II)问 U 与 X 是否相互独立?并说明理由;.
(II)求 Z=U +X 的分布函数 F(z).

(23) 设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, 0<x<\theta\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,X_3$ 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$。

(1)求 T 的概率密度
(2)确定 $a$，使得 $aT$ 为 $\theta$ 的无偏估计